Bruchrechnen auf dem inneren Bildschirm

Worum geht es?

Brüche und die Rechenarten damit werden in den Rechenbüchern und im Unterricht immer wieder in Zeichnungen dargestellt. Wer die Bilder versteht und in Zahlen umsetzen kann, wird auch immer wissen, wie gerechnet werden muss. Hier lernst Du, diese Bilder in deinem Gedächtnis zu speichern, sie je nach Bedarf wieder vor Dein "inneres Auge", beziehungsweise auf deinen "inneren Bildschirm" zu holen und in die entsprechenden Zahlen umzusetzen. Ebenso wichtig ist es, daß Du lernst, Dir bei Bedarf zu jeder Aufgabe Dein eigenes Bild oder gar Deinen eigenen Film zu erschaffen.
Dazu ist es zunächst notwendig, daß Du lernst, Bilder zu sehen und nach der Methode des Gedächtnistrainers Roland Geisselhart ganze "Ketten" von Bildern im Kopf zu behalten und beliebig abrufen zu können.
Was Du davon hast, wenn du Dir die Mühe gibst, das zu lernen? Allein beim Bruchrechnen ersparst du dir das Auswendiglernen (und im Prüfungsstress Durcheinanderbringen) von mindestens 12 Regeln. Deinen "inneren Film" kannst Du so oft ablaufen lassen, wie Du willst.

Vorübungen

Sehen von Bildern

Magst Du Tiere? Besitzt Du eines oder gibt es in der Nachbarschaft eins, das Du kennst? Wenn ja, dann stelle es Dir jetzt einmal vor. Siehst Du es? Lass es sich bewegen. Höre es, spüre es, wenn man es anfassen darf, rieche es. Na, wie geht es? Sind Deine Bilder auch farbig? Wenn nicht, dann noch einmal mit Farben. Nimm Dir Zeit. Genieße Dein Lieblingstier.
Welchen Lehrer oder welche Lehrerin kannst Du leiden? Stelle Dir sie oder ihn einmal ebenso vor. Lasse Deine Person sprechen, sich bewegen, etwas erklären. Welches Deo benutzt sie?
Wie sieht Dein Klassenzimmer von deinem Platz her gesehen aus? Kannst Du es auch von der Tafel oder von der Eingangstür aus sehen?
Deine Freunde? Siehst Du sie? Was tun sie? Was sagen sie?
Hat Dir etwas am Fernsehen gefallen? Was davon kannst Du Dir noch vor Dein inneres Auge rufen?

Sich leicht entspannen

Hast Du Dich angestrengt? Du sollst Dich bemühen, aber nicht dabei verkrampfen. Üben wir ein wenig Entspannung:
Setzte Dich bitte gerade aber nicht steif auf deinen Stuhl. Am besten auf die Vorderkante, so daß Dein wertes Hinterteil in Richtung Lehne etwas vorsteht. Die Beine sollten einen rechten Winkel bilden, die Fußsohlen flach auf dem Boden ruhen. Nun las einfach deinen Atem gehen und wieder kommen. Das Gehenlassen ist wichtig. Der zurückkommende Atem soll sich im Bauch, unter den Rippen sammeln. Wie das geht, spürst Du am besten, wenn Du Dich auf den Rücken legst. Dann funktioniert nämlich nur noch die Bauchatmung.
Wenn Du Dir nun noch beim Ausatmen vorstellst, daß Dein ausströmender Atem in Richtung der Sitzfläche des Stuhles fließt, so wirst Du nach einigem Üben eine angenehme Schwere in deinem Körper spüren. Das zeigt den Grad deiner Entspannung an. Entspannung fördert Ruhe und Konzentration. Nicht nur vor und während des Lernens sondern auch bei Klassenarbeiten.

Verknüpfen von Bildern

Hier lernst Du, wie man Bilder durch die eigene Phantasie aneinanderhängt und sie so nacheinander wieder auf den inneren Bildschirm bringt.
Nehmen wir ein erstes Paar. 1. **Kirschen**. Ich sehe zwei schöne dunkelrote, saftige Kirschen, deren Stiele zusammengewachsen sind.
2. **Bratpfanne**. Eine große Pfanne aus schwarzem Gußeisen mit Holzgriff. Siehst Du sie?
Jetzt haben wir zwei Bilder. Wie kriegen wir die zusammen? Indem wir sie etwas miteinander tun lassen. Das nennt man verknüpfen oder auch assoziieren. Und dabei entsteht ein kleiner Film.
Was können unsere beiden Bilder miteinander tun? Mir fiel als erstes Folgendes ein:
Ich sehe die saftigen Kirschen auf dem Tisch liegen und haue dann mit der Bratpfanne drauf, daß es spritzt. Siehst Du den Film?
Oder in der Pfanne ist das Fett heiß und ich werfe die Kirschen hinein. Was siehst Du? Was hörst Du? Wie riecht es?
Wenn nun jemand fragt: Was gehört zu Kirschen? Oder: Was gehört zu Bratpfanne? Dann brauche ich mir nur meinen bis jetzt noch kurzen Film vor das "innere Auge" zu holen und schon ist die richtige Antwort klar.
Wir verlängern den Film. Als nächstes habe ich die Karte "**Düsenjet**" gezogen. Ich sehe und höre diesen. In der Hand habe ich die Pfanne mit den brutzelnden Kirschen. Die schleudere ich -meine Bilder müssen keiner Realität entsprechen, gerade darum macht es mir Spaß- samt dem Fett direkt auf die Scheibe des Düsenjets und sehe, wie sich dort alles verteilt. Der wütende Pilot droht mir mit der Faust.
Nächstes: **Portion Eis.** Na, ganz einfach: Der verärgerte Pilot leckt jetzt zu seiner Beruhigung an einem schönen Eis mit deinen Lieblingssorten. Siehst Du es?
Jetzt haben wir einen Film aus vier Begriffen. Kriegst Du ihn noch zusammen? Wenn nicht, lies noch mal nach. Wichtig ist: Du mußt die Bilder sehen und darfst die Handlungen nicht nur denken.
Nehmen wir noch einen Begriff dazu. **Briefumschlag** habe ich gelost. Den sehe ich jetzt erst mal vor mir. So, und dann muß ich ihn an den bisherigen Film anhängen. Gut, der Pilot steckt die angelutschte Eisportion in den Briefumschlag und wirft diesen aus dem Fenster.
So, kannst Du nun den ganzen Film langsam auf deinem "inneren Bildschirm" ablaufen lassen und dabei die Begriffe nennen? Mit "Kirschen" fing es an: Und? Geht es auch schon rückwärts?
Wenn ja, dann kannst Du jetzt schon zum Selberüben übergehen. Man kann dazu Memorybildkarten wählen oder Hauptwörter aus der Rechtschreibkartei. Hauptsache ist das Verknüpfen und daß man den selbsterstellten Film deutlich und fließend sieht.
Wenn nicht, dann üben wir mal in kleinen Schritten.
Verknüpfen heißt noch einmal, daß man zwei Dinge, die man deutlich auf dem "inneren Bildschirm" sieht, etwas miteinander tun läßt und dann den Film sieht und Geräusche und Gerüche dazu wahrnimmt. Übe nun bitte mit deinen eigenen Vorstellungen und Verknüpfungen an solchen Paaren. Verknüpfe also immer die zwei Begriffe in einer Zeile miteinander.

Hamburger **Messer**

Füllfederhalter **Brezel**

Schreibmaschine **Banane**

Nußknacker **Bierglas**

Lokomotive **Schaschlikspieß**

Fahrrad **Drachenflieger**

Computer **Korkenzieher**

Na, wie gings? Überprüfe Dich nun bitte selbst indem Du die eine Reihe mit einem Blatt Papier bedeckst und dann zu den offen gebliebenen Begriffen den jeweiligen Partner nennst. Wo Du den Partner nicht findest, übe noch mal und wiederhole Deine Überprüfung. Dann halte die andere Reihe zu und nenne die Partner.

Versuchen wir es mal mit Dreierreihen.

Feuerzeug **Sonnenbrille** **Blumenstock**
Versuche bitte zunächst Deine eigene Lösung. Klappt es?
Eine kleine Hilfe: Ich kann das Feuerzeug in die Hand nehmen, damit das Brillengestell ansengen, daß es ordentlich stinkt und dann die Brille über den Blumenstock hängen. Aber ich muß die Gegenstände und den Film deutlich vor mir sehen. Wenn der Film steht, frage Dich bitte vorwärts und rückwärts ab.
Noch ein paar Serien zum Selberüben.

Fahrrad **Hamburger** **Fotoapparat**

Gießkanne **Liegestuhl** **Schubkarre**

Fladenbrot **Filzstift** **Fensterscheibe**

Würstchen **Bleistift** **Weinglas**

Wie läuft es? Jeder hat seine Stärken und seine Schwächen. Vielleicht brauchst Du mehr Zeit und Übung. Wenn es schlecht läuft, wiederhole noch einmal von Anfang an und stelle Dir eigene Aufgaben. Deine Phantasie wird stärker und Dein Lernen besser.

Nun steigern wir die Länge der "Ketten".

Taschenrechner, Küchensieb, Auto, Nadelkissen

Hubschrauber, Fallschirmspringer, Traktor, Glas Sekt, Bumerang, Fasan

Radiergummi, Fesselballon, Apfelbaum, Schneebesen, Rennwagen, gebratenes Hähnchen, Halskette

Pizza, Tasse Kaffee, Mülltonne, Kerzenleuchter, Fahrrad, Gartenschere, Schneemann, Weihnachtspäckchen

Wenn Du wenigstens einige dieser Ketten behalten kannst, bist Du schon ganz gut auf das Bruchrechnen vorbereitet. Trotzdem rate ich Dir, weiterzuüben, denn dann wirst Du bald alles, was Du zu lernen hast, in Bildern abspeichern und nach Belieben wieder auf deinen "inneren Bildschirm" herunterladen können.

Anwendung im Bruchrechnen

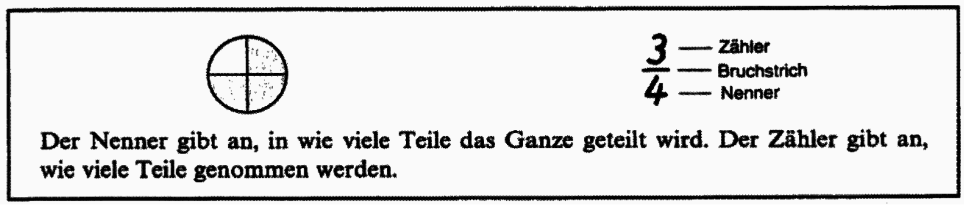
Was ist ein Bruch?

Bruch kommt von Brechen.
Stellen wir uns eine schöne Tafel Schokolade vor. Die sollen wir für zwei deiner Freunde teilen. Also brechen wir die Tafel genau in der Mitte durch, -siehst Du es?- dann bekommt jeder eine halbe Tafel Schokolade. Rechnerisch sieht das so aus:
Eine Tafel Schokolade geteilt durch Zwei ist gleich eine halbe Tafel Schokolade. (Das Ergebnis sagt aus, was einer bekommt!)
In Matheschrift:
1(Tafel) : 2 = $\frac{1}{2}$ (Tafel)

"Ein Halb" schreibt man also mit der 1 über dem Bruchstrich und der 2 unter dem Bruchstrich. Damit ist klar: Unter dem Bruchstrich steht immer die Zahl durch die das Ganze -in unserem Fall die Tafel Schokolade- geteilt wurde.
Kannst Du Dir jeweils einen Film dazu vorstellen, wenn nun die nächste Tafel an drei deiner Freunde verteilt wird und die übernächste an vier?
Klar doch, dann bekommt erst jeder $\frac{1}{3}$ (ein Drittel) und dann $\frac{1}{4}$ (ein Viertel)!
Kannst Du dasselbe mit einem langen Weißbrot als Film ablaufen lassen? Wie heißen die Teile? In Wörtern? In Zahlen?
Wie sieht es aus mit einer runden Uhr mit Zeigern? Kannst Du Dir diese Uhr vorstellen? (Ja, die meisten Leute haben heute Digitaluhren, aber solche Uhren sieht man an Bahnhöfen oder auch auf Kirchtürmen.)
Schaust Du auf die Stunden, so ist die Uhr in wie viele Teile eingeteilt? Welcher Teil ist dann eine Stunde? Welche Zahl kommt unter den Bruchstrich? Aha, ja 12 natürlich. Damit ist eine Stunde also $\frac{1}{12}$. Die Zahl, die unter dem Bruchstrich steht, nennt uns, in wie viele Teile das Ganze- die ganze Uhr, die ganze Tafel Schokolade, das ganze Brot oder was auch sonst- geteilt wurde und heißt deswegen **"Nenner"**.
Eine "Atempause" gefällig? Entspannt ist man konzentrierter.

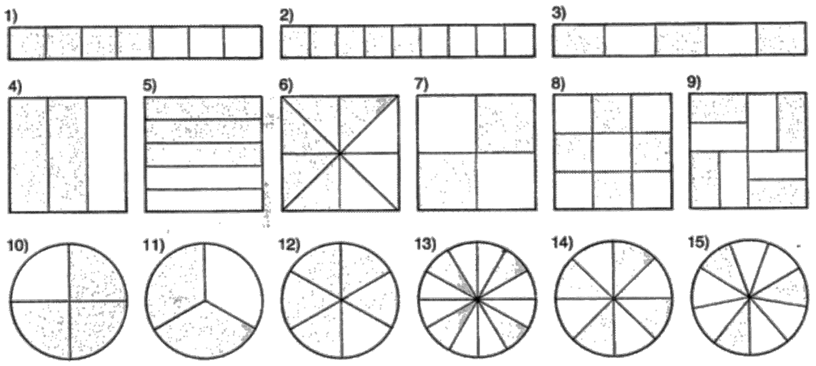
Zu Erinnerung: Was ist ein Nenner?
Wir kennen schon die Uhr als runden Körper. Nun nehmen wir mal eine Pizza, die ist ebenfalls rund. (Oder wenn es Dir besser schmeckt und Du es Dir leichter vorstellen kannst: Einen Käsekuchen, einen Obstkuchen, eine Torte oder gar einen Hamburger, nur rund soll es sein, und Du mußt es wirklich sehen.)
Unsere Pizza, - oder was auch immer- schneiden wir nun einmal längs und einmal quer durch. (Verglichen mit der Uhr wäre das ein Schnitt von 12 nach 6 und einer von 9 nach 3. Siehst Du es?) In wie viele Teile haben wir unsere runde Fläche nun zerschnitten? Wie heißt der Nenner?
So, und nun hat irgendein freches Wesen, sei es Schwesterchen oder Hund oder Katze ein Stück davon geklaut. Wie viele Stücke haben wir nun noch? Weißt Du natürlich auf Anhieb. Aber sehe es deutlich auf deinem inneren Bildschirm und zähle noch mal nach. Ja, von den vier Stücken, die ursprünglich da waren, haben wir nur noch drei, also drei Viertelstücke. Ich ließ Dich deswegen zählen, weil die

Zahl, die sagt, wie viele Stücke (noch) da sind, **"Zähler"** heißt. Wir schreiben sie über den Bruchstrich. Dann sieht unser Bruch so aus: $\frac{3}{4}$.
Hier noch eine Darstellung zum Merken aus einem Rechenbuch:

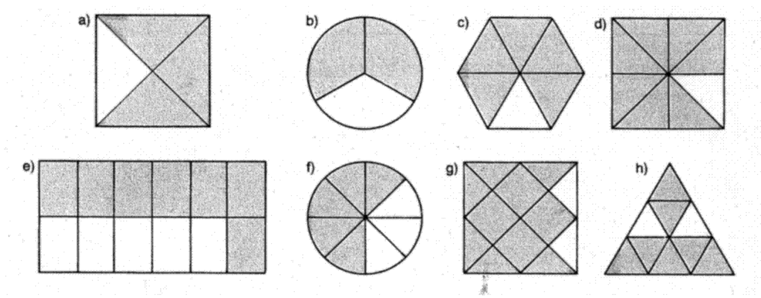


Hast Du alles genau angesehen? Gut, dann Schau weg vom Buch und versuche, ob Du alles im Kasten vor deinem "inneren Auge" sehen kannst. Wenn nicht, noch mal anschauen und wieder probieren, bis es klappt. Dann bringe bitte mehr Leben in Deine Vorstellung: Stelle Dir die Abbildung als Pizza, Torte, Hamburger und so weiter vor und jedes Mal auch, wie der Bruch entsteht. Also: Eine ganze Pizza, in vier Teile geschnitten, 4 unter den Bruchstrich. Nun verschwindet ein Teil, drei sind noch da, also 3 über den Bruchstrich.
Übst Du gelegentlich auch noch Vorstellen und Verknüpfen? Je mehr man übt, desto leichter geht alles.
Nun stelle Dir bitte wieder ein langes Weißbrot vor. In manchen Bäckereien heißt es französisch "flute". Siehst du es? Gut, dann zerbreche dieses lange Weißbrot ebenfalls in vier Stücke. Siehst du es deutlich? Riechst du das frische Brot und siehst du auch die Krümel, die beim Brechen heruntergefallen sind? Also, dann nimm ein Stück weg. Wie heißt der Bruch zu den Stücken, die noch da sind?

Runde Form, lange Form hatten wir, fehlt uns noch das Viereck. Nehmen wir wieder die Schokolade. Ist das Bild da? Welche Marke? Oder schon ausgepackt? Egal, aber verfahre bitte jetzt so mit der Tafel, daß am Ende genau $\frac{3}{4}$ daliegen. Wie hast du es gemacht? Hast Du gemerkt, daß es mehrere Möglichkeiten gibt, die Tafel in Viertel zu teilen? Wenn nicht, dann kannst du es in der folgenden Aufgabe sehen.
Um die Aufgabe lösen zu können, mußt Du nur wissen, was ein Bruch ist, d.h. Was unter dem Bruchstrich steht und was über den Bruchstrich geschrieben wird. Alles klar?
Schreibe dir nun auf, welcher Bruchteil der jeweiligen Figur dunkel gefärbt ist.



Lösungen in veränderter Reihenfolge zur Selbstkontrolle:
$\frac{3}{9}; \frac{4}{12}; \frac{2}{3}; \frac{4}{8}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{4}{9}; \frac{2}{4}; \frac{4}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4};$
Noch eine Aufgabe zum Üben:



Schreibe dir hier bitte auf, welche Bruchteile hell dargestellt sind. Achtung: bei Aufgabe g) fehlen zwei Schnitte, bzw. Linien! (Gehe von der Größe der weißen Teile aus.)

Lösungen in veränderter Reihenfolge:
$\frac{1}{4};\frac{2}{9};\frac{2}{16};\frac{1}{3};\frac{5}{8};\frac{1}{6};\frac{5}{12};\frac{1}{8};$

Zusatzübung: Decke bitte die Zeichnungen ab und versuche Dir anhand der Lösungen die jeweils zugehörigen Brüche vorzustellen. Es müssen nicht alle auf einmal sein, sondern vielleicht jeden Tag einige.

<u>Bruchteile von Anzahlen</u>

<u>Grundsätzliches über das Teilen (Dividieren):</u>

Stelle Dir vor auf dem Tisch steht ein Korb mit 12 Äpfeln. Oder CDs, Videospielen, egal, was Du Dir gern vorstellst. Es ist immer gut, sich einen Vorgang mit vielen verschiedenen Bildern vorzustellen. Am Ende wirst Du die Bilder nur noch brauchen, wenn es schwierig wird.
Um den Tisch sitzen vier Kinder. Wenn nun die 12 Äpfel unter die vier Kinder verteilt werden, bekommt jedes?
Aha: $12 : 4 = 3$; Das ist die Geteilt - bzw. die Divisionsaufgabe.
Wie schon gesagt, sagt das Ergebnis aus, wie viel einer bekommt.
Als Bruchrechnung sieht das so aus:
$\frac{1}{4}$ von $12 = 3$;
Stelle dir bitte noch einmal genau vor, wie unter vier Kindern verteilt wurde und wie viele Äpfel - oder was auch immer- nun jedes Kind vor sich liegen hat.
Man kann auch so sagen: Bei dem einzelnen Kind ist die 12 nur noch ein Viertel mal da. Das sieht dann in Bruchschreibweise so aus:
$12 * \frac{1}{4} = 3$;
Nochmals, * $\frac{1}{4}$ heißt: Das ursprüngliche Ganze ist nur noch $\frac{1}{4}$ mal da! Wenn man sagt $\frac{1}{4}$ von, dann ist das dasselbe mal $\frac{1}{4}$!

<u>Mehrere Anteile vom Ganzen</u>

Sagen wir nun, die 12 Dinge wären nun $\frac{3}{4}$ mal da. Kannst Du Dir schon vorstellen, wie das in Wirklichkeit aussieht? Und in Bruchschreibweise? Na?
Ja: $12 * \frac{3}{4} = 9$;

Bild:
Jedes Kind bekam drei Äpfel. Legt man nun die Äpfel von drei Kindern zusammen, so sind es Neun.

Rechengang

$12 \frac{3}{4} =$

Durch den Nenner wird geteilt: 12 : 4 = 3 ; (was ein Kind bekommt)

Der Zähler sagt, wie viel mal das eine Teil da sein soll also: 3 * 3 = 9 ; (siehst Du auch alles?)

$12 * \frac{3}{4} = 9$; Das heißt also nochmals: Die 12 ist nur noch $\frac{3}{4}$ mal vorhanden.

(Wenn Du Dir $\frac{3}{4}$ noch einmal vorstellst,(Pizza, Schokolade) siehst Du, daß ein Teil fehlt!)

Üben wir das noch ein wenig: Stelle Dir eine Tafel Schokolade vor. Sie sei sechs Rippen lang und vier Rippen breit. Also besteht sie dann aus insgesamt 24 Rippen. Sie in Sechstel einzuteilen ist nun leicht. Wir brauchen sie nur Reihe um Reihe von Rippe zu Rippe von oben nach unten abzubrechen: Na, wie viele Rippen sind dann in einer Reihe?

Nun legen wir zwei Reihen zusammen. Kannst Du in deiner Vorstellung abzählen wie viele Rippen das sind?

Drei Reihen, vier Reihen, fünf Reihen?

Das kann man doch ganz einfach sehen. Zählen wirst Du nicht unbedingt müssen, denn Du bist ja sicher gut im Kopfrechnen.

So jetzt stellen wir uns vor, die Tafel sei in ihre 24 Rippen zerbrochen. Hoffen wir, daß der Täter beim Zerbrechen eine Serviette benutzt hat, die wir nun beim Verteilen auch benutzen. Also, da liegen die 24 Rippen in der Mitte des Tisches. Ich gebe die Verteilungsaufträge nun schon gleich in Bruchschreibweise an. Du kannst beim Lösen Deine Vorstellungskraft anwenden oder, wenn es Dir schon leicht fällt, einfach mit den Zahlen rechnen. Wenn Zweifel auftreten, zurück zur Vorstellungskraft! (Kraft erwirbt man auch hier durch Training)

$24 *. \frac{1}{6} =$ ......;

$24 * \quad \frac{3}{6} =$ ....;

$24 * \frac{5}{6} =$ ....;

$24 * \frac{2}{6} =$ ....;

Die Ergebnisse muß ich Dir hier doch nicht angeben, oder? Wäre doch fast eine Beleidigung. Wenn Du trotzdem unsicher bist: Stelle Dir die Tafel und ihre jeweilige Teilung vor und zähle nach. Gelingt auch das nicht ganz, dann zeichne. Damit erwirbst Du Dir eine neue Erfahrung, nämlich, daß eine gut trainierte Vorstellungskraft Arbeit erspart!

Man kann die 24 Rippen auch anders teilen:

$24 * \frac{3}{8} =$ ....;

$24 * \frac{5}{8} =$ ....;

$24 * \frac{4}{8} =$ ....,

$24 * \frac{2}{8} =$ ....;

$24 * \frac{7}{8} =$ ....;

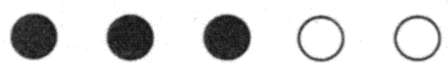
Na, kommst Du zurecht? Ähnliche Übungsaufgaben findest Du bestimmt auch in Deinem Rechenbuch. Wahrscheinlich wirst Du sie jetzt mit reinem Zahlenrechnen lösen können. Aber bitte stelle Dir wenigstens hin und wieder in Bildern vor, was du tust. Denn dann wirst Du die Rechenweise wenigstens nicht so leicht vergessen.

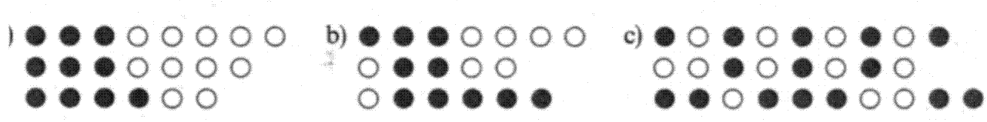
Einen Schritt weiter: Wie viel sind $\frac{3}{4}$ von 100 Euro?
Du siehst jetzt vielleicht einen Hunderteuroschein vor Dir. In Stücke schneiden dürfen wir ihn nicht. Also wechseln wir ihn um in kleineres Geld. Egal ob Zehner oder Zwanziger - Scheine. Verteilen wir diese nun auf vier Häufchen oder an vier Personen, oder auf die vier Viertel einer Pizza, so bleiben am Ende jedoch 20 Euro übrig. Diese wiederum wechseln wir um in Münzen und dann liegen auf jedem Häufchen - wahrscheinlich hast Du das schon längst errechnet, aber bitte sehe es jetzt - 25 Euro.
Damit haben wir die Rechnung 100 Euro * $\frac{1}{4}$ = 25 Euro ; vollzogen.
Wie lautete unsere Aufgabe? Aha, wie viel liegt dann auf drei Häufchen?
100 Euro * $\frac{3}{4}$ = 75 Euro;
Das "Umwechseln in kleinere Münze" hilft immer beim Berechnen von Bruchteilen. Wird zum Beispiel von Dir verlangt, $\frac{6}{8}$ von einem Kilogramm zu berechnen, so wird das eine Kilo erst in Tausend Gramm umgewandelt.
Vorsicht bei Aufgaben mit Zeitangaben. Manche Schüler sind nicht davon abzubringen, so zu rechnen, als habe eine Stunde 100 Minuten und so weiter. Um dieses zu vermeiden, schlage einmal in Deinem Rechenbuch solche Zeitaufgaben auf und stelle Dir eine große runde Uhr dazu vor. Immer, wenn Du eine solche Aufgabe anfängst, solltest Du die Uhr sehen. Da kannst Du ablesen, wie viele Stunden ein halber Tag hat und wie viele Minuten eine Stunde. Der Sekundenzeiger geht pro Minute einmal rundum! Oder falls Du Dich nicht von Deiner Digitaluhr lösen kannst: Bevor die Pausenklingel ertönt - Ihr habt ja alle Eure Uhren genau darauf eingestellt - welche Zahl erscheint dann zuletzt im Display? Warum? Auch das kannst Du abspeichern und Dir wieder vorstellen, wenn Du eine Zeitaufgabe lösen sollst. Sich ein genaues Bild von der Sache zu machen, mit der man rechnet, hilft Fehler zu vermeiden!

Die folgende Aufgabe soll Dir helfen, Deine Vorstellung von Bruchteilen von Anzahlen zu festigen: Welcher Anteil der Kugeln ist dunkel?

Beispiel: 1 Kugel von 5 Kugeln = $\frac{1}{5}$;

3 Kugeln von 5 Kugeln = $\frac{3}{5}$;





Lösungen: $\frac{10}{21}$; $\frac{10}{18}$; $\frac{15}{27}$;

Gemischte Zahlen

Weißt Du noch, was der Nenner eines Bruches ist, und was er aussagt? (Entschuldige bitte, wenn ich Dich langweile oder ärgere, aber als Lehrer habe ich da so meine Erfahrungen.)
Wenn Deine Bilder verfügbar sind, dann siehst du jetzt wohl eine mittendurch gebrochen Tafel Schokolade oder eine zerschnittene Pizza. Daneben der zugehörige Bruch und unter dem Bruchstrich steht, in wie viele Teile das Ganze eingeteilt wurde. Ja klar doch!
Und wenn die Pizza - oder welche runde Fläche auch immer - gerade eben geschnitten wurde, aber noch kein Stück weggenommen wurde, was muß dann über dem Bruchstrich stehen? - Ja, klar! Dieselbe Zahl, die unter dem Bruchstrich steht! Denn wenn ich etwas in Achtel zerschneide dann sind es acht Stücke.
Also sind acht Achtel ein Ganzes. In Bruchschreibweise sieht das so aus: $\frac{8}{8} = 1$; (Es fehlt noch kein Stück!)
Übung: Stelle Dir nun selbst einmal einige zerteilte Sachen als Ganze vor und sieh den Bruch dazu.

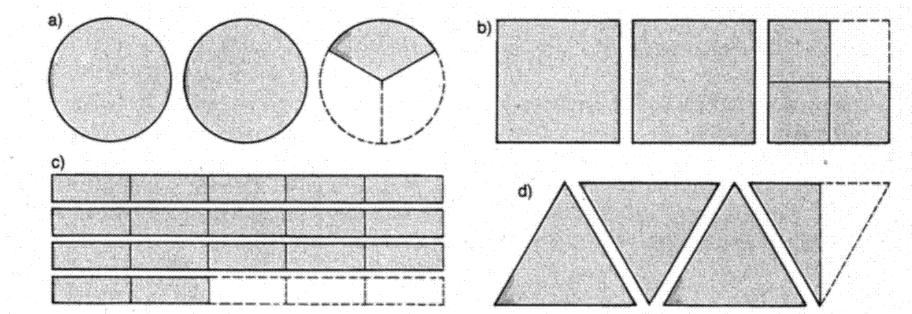
Jetzt stellen wir uns vor, auf der Theke der Konditorei stehen 3 Torten. Zwei davon sind noch ganz, aber von der dritten fehlt ein Viertel. Ist das Bild samt Geruch da? Läuft das Wasser im Mund zusammen?
Also Zwei Ganze und drei Viertel, das schreibt man so: $2\frac{3}{4}$; Verstanden?

Nun stellen wir uns vor, die zwei noch ganzen Torten würden in Viertel zerschnitten aber es würde nichts von Ihnen weggenommen. Wie viele Viertel wären nun auf dem Tisch?
Eine Torte (vier Stücke) , noch eine Torte (vier Stücke) und noch 3 Stücke, das ergibt doch 11 Stücke!
Rechnung:
$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

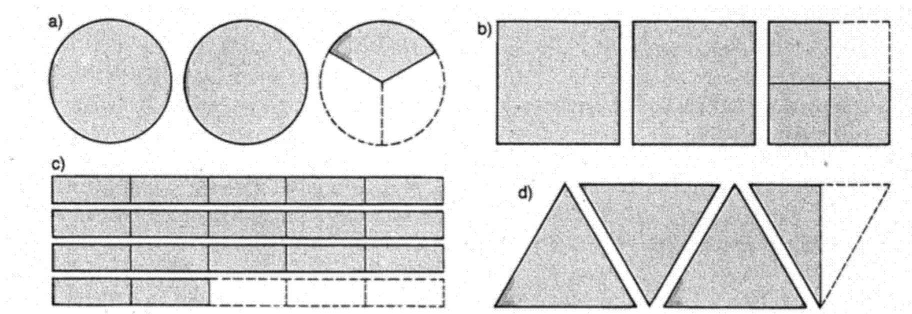
Jetzt noch etwas Neues: Der Lehrling hat in der Backstube Unordnung angerichtet. Auf mehreren Kuchentellern liegen insgesamt 19 Achtelstücke Käsekuchen. Ins Schaufenster oder in die Glastheke sollen aber nur ganze Kuchen. Wie viele ganze Kuchen kann man aus 19 Achtelstücken zusammensetzen? Kannst Du sehen, wie die ganzen Kuchen entstehen?

Der Nenner heißt 8. Also ergeben wie viele Stücke einen ganzen Kuchen?
Rechnung:
$\frac{19}{8} = (\frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{3}{8}) = 2\frac{3}{8}$;
Rein rechnerisch: In die 19 geht die 8 zweimal (ganz) Rest 3 ;

Jetzt gebe ich Dir einige Aufgaben über gemischte Zahlen zum Üben. Wenn es Schwierigkeiten geben sollte, schaue dir bitte noch mal an, was bisher darüber erklärt wurde.
Hier sind gemischte Zahlen dargestellt. Schreibe bitte auf, welche gemischte Zahl jeweils gemeint ist und rechne sie dann in lauter Bruchteile um. Dann sähe unsere Übung von eben so aus: $2\frac{3}{8} = \frac{19}{8}$;



Lösungen: $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$; $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$; $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$; $3\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$;



Lösungen: $2\frac{7}{8}=\frac{23}{8}$; $1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$; $2\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$; $2\frac{5}{6}=\frac{17}{6}$;
Ich denke doch, daß es Dir leicht fiel.

<u>Erweitern und Kürzen</u>

Das ist ein sehr wichtiges Stück Bruchrechnen. Aber mit einer gekonnten bildhaften Vorstellung kann es jeder leicht meistern.
Nehmen wir wieder unsere schon viel strapazierte Pizza. Da liegt sie vor uns frisch und warm auf dem Tisch. Siehst Du sie? Riechst Du sie? Jetzt wird sie in Viertel zerteilt - das kennen wir schon, aber wir halten das Bild fest - und ein Stück davon wird wiederum weggenommen. Diesen Bruch kennen wir! Jetzt kommt aber das Neue:
Jedes Stück wird noch einmal genau in der Mitte durchgeschnitten. Kannst Du sehen, wie viele Stücke jetzt auf dem Teller liegen?
Noch einmal den ganzen Film: Da lag die ganze Pizza. Sie wurde in vier Teile geschnitten. Ein Stück wurde weggenommen. Die übriggebliebenen Stücke wurden jedes in der Mitte durchgeschnitten. So, und welcher Teil der ganzen ursprünglichen Pizza stellt nun ein Stück dar? (Dazu brauchen wir vielleicht die Vorstellung von der ganzen, in Viertel geschnittenen Pizza mit der neuen Teilung)
Jetzt ist alles klar! Natürlich: Die ganze Pizza wäre in 8 Stücke zerteilt. Und aus den $\frac{3}{4}$ sind durch das erneute Schneiden $\frac{6}{8}$ geworden! Dabei ist das, was von der Pizza noch auf dem Teller lag, nicht kleiner geworden. Es ist dasselbe geblieben
Also können wir schreiben:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8};$$

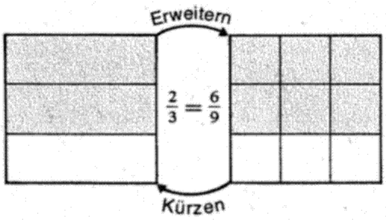
Bitte stelle Dir den Vorgang auf dem Teller noch einmal genau vor. Denn wenn Du das kannst, wirst Du immer wissen, daß man einen Anteil in kleinere Einzelteile zerschneiden kann, ohne daß sich die Größe des Anteils ändert.
Rein rechnerisch sieht das so aus: $\frac{3*2}{4*2} = \frac{6}{8}$;
Jedes Stück wurde in zwei zerschnitten. Dadurch verdoppelte sich sowohl die Anzahl der Teile in die das Ganze zerlegt ist (Nenner) als auch die Anzahl der noch vorhandenen Teile (Zähler). Kannst du dir vorstellen, wie es aussieht, wenn wir jedes Stück in drei zerschneiden?
Das ist nicht so leicht vorzustellen. Aber es ist leicht zu rechnen: $\frac{3*3}{4*3} = \frac{9}{12}$;
So kann ich bei jeden Bruch die Zahlen verändern, indem ich **Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl malnehme (multipliziere).** Die Bruchteile werden zwar kleiner, aber dafür mehr, und das Stück, das auf dem Teller liegt, - behalte bitte dieses Bild - bleibt immer gleich groß! Dieses Verfahren nennen wir **Erweitern.**

Hättest Du Lust jemanden zu veräppeln? In der Phantasie geht das ganz leicht: Wir verrühren jetzt geriebenen Käse in heißer Tomatensoße. Diese Masse gießen wir über die Schnitte, mit denen wir aus der Dreiviertel - Pizza eine Sechs Achtel Pizza gemacht hatten. Nach Abkühlen und Eintrocknen der Masse sieht der verblüffte Betrachter nun statt $\frac{6}{8}$ na was? Steht dein Film? Wenn nicht, lies bitte diesen Abschnitt noch mal und laß die Bilder mitlaufen.
Aus der Sechsachtelpizza ist also wieder eine Dreiviertelpizza geworden. Die Zahlen wurden kleiner, die Einzelstücke zwar größer, aber was auf dem Teller liegt bleibt gleich groß. Dieses Verfahren nennen wir **Kürzen**. Rein rechnerisch sieht das so aus: $\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$;
So, und nun eine Kraftübung im Bildersehen:
Stelle Dir eine Tafel in der Schule vor. Darauf wird ein Kreis gezeichnet. Dieser wird mit Kreidestrichen in Viertel geteilt. Dann entfernt ein Lappen links oben den durch ein Viertel abgeteilten Kreisbogen. Damit sind es nur noch drei Viertel. Nun wird jedes Viertel durch einen Kreidestrich in der Mitte geteilt. Halte das Bild bitte fest und zähle die Teile. Geht es noch? Gut, und jetzt stellen wir uns vor, wie die eben gezogenen Striche wieder weggewischt werden. Wie sieht der Bruch nun aus? Geschafft?
Ich schlage Dir vor, eine Atempause einzulegen und den Vorgang dann noch einmal zu wiederholen. Denn wenn Du das kannst, wirst Du mit diesem Kernstück der Bruchrechnung wohl keine Schwierigkeiten mehr haben.
Kannst Du Dir auf dieselbe Weise vorstellen, wie aus drei Vierteln neun Zwölftel werden und wieder rückwärts? (In wie viele Teile mußt Du jedes Viertel zerschneiden?) Ja, das ist ein Kraftakt!
Falls es Probleme gab, die du auch durch mehrfach wiederholte Versuche nicht ausräumen konntest, kannst Du diese Hilfe aus einem Rechenbuch benutzen:

Erweitern von Brüchen

$\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl multipliziert.



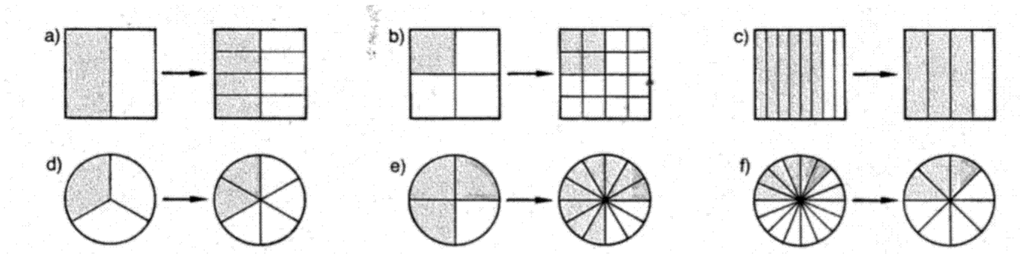
Kürzen von Brüchen

$\frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$

Zähler und Nenner werden durch die gleiche Zahl dividiert.

Durch Erweitern und Kürzen ändert sich die Größe des Bruchteils nicht.

Schau Dir die Zeichnung genau an, schließe die Augen. Siehst Du alles, mit den Darstellungen in Zahlen? Wenn nicht, wiederholen, bis es klappt.
Auch mit der folgenden Aufgabe kannst Du Deine Vorstellungskraft stärken:
Die Zahlen mit denen erweitert wurde, oder durch welche gekürzt wurde, kann man errechnen, wenn man sieht, wie sich Zähler und Nenner verändert haben. Wenn aus Vierteln Achtel werden ist natürlich die Erweiterungszahl 2. Wenn Du genau hinschaust, kannst Du auch feststellen, daß sich die Erweiterungszahl daraus ergibt, in wie viele Teile ein Teil zerschnitten wurde.



Lösungen: $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}; \frac{6}{16}=\frac{3}{8}; \frac{6}{8}=\frac{3}{4}; \frac{1}{3}=\frac{2}{6}; \frac{3}{4}=\frac{9}{12}; \frac{1}{4}=\frac{4}{16};$

Sichern wir hier mal ab, was wir bis jetzt gelernt haben.
Was ist ein Bruch? Stelle Dir bitte zumindest den Bruch $\frac{3}{4}$ als Teil einer runden, einer rechteckigen und auch einer quadratischen Fläche vor. (Kuchen, normale Tafel Schokolade, Ritter - Sport) Fallen Dir noch andere Brüche ein, kannst Du sie dir vorstellen?
Eine Tafel Schokolade bestehe aus 24 Rippen. Wie viele Rippen wären $\frac{5}{6}$ davon? Kannst Du es sehen? Wie schreibt man die Rechnung dazu? (Wenn es Dir nicht einfällt, blättere bitte zurück. Dazu sind Bücher da!)
Wieviel sind $\frac{3}{5}$ von 100 Euro? (Bild? Rechenweg in Zahlen?)
Zwei ganze Kuchen und fünf Achtelstücke ergeben zusammen wie viele Achtel?
Stelle Dir vor, Du hast 27 Fünftelstücke einer bestimmten Kuchensorte. Wie viele ganze Kuchen kannst Du daraus zusammensetzten. Wie viele Fünftelstücke bleiben übrig? Wie sieht die Rechnung in Zahlen aus?
Was heißt **Erweitern** ? Fällt Dir ein Bild dazu ein? Ein Zahlenbeispiel?
Kürzen? Zahlen? Bild?
Alles klar?
Gut, dann sieh Dir den folgenden Bruch an und stelle Dir vor, was er darstellen kann, wie er entstanden sein könnte und was man alles damit machen kann.

$$2\frac{5}{6}$$

Das soll dir jetzt in Zukunft immer einfallen, wenn Du einen Bruch siehst. Wenn der Bruch ins Bild umgesetzt ist, ergeben sich die sich die Veränderungsmöglichkeiten von selbst.
Auf das Folgende bist Du damit bestens vorbereitet.

IV Vergleichen von Brüchen

Ein Pfälzer Fußballspieler wechselte vom Amateurlager in die zweite Bundesliga. Seine damaligen Mannschaftskameraden erzählen heute noch gerne diese Geschichte:
Weil der Spieler, nennen wir ihn Schorsch, so viele Tore für den Verein geschossen hatte, wurde ein Abschiedsspiel für ihn angesetzt.
In der Spielersitzung spulte der Präsident eine Lobeshymne auf den guten Schorsch ab und schloß mit dem Satz: "Und von den Einnahmen, lieber Schorsch, bekommst natürlich du ein Viertel auf die Hand!"
Was der Schorsch in breitestem Pfälzisch zurückgab, kann man so übersetzten: "Herr Präsident, das sage ich ihnen gleich, unter einem Achtel laufe ich erst gar nicht auf!"
Über diese Antwort wird noch heute gelacht.
Wenn Du allerdings nicht verstehst warum, dann bist Du dabei ertappt, daß du dir die Brüche nicht vorgestellt hast.
Wenn ich aus Vierteln Achtel machen will, muß ich jedes Viertel in der Mitte noch mal durchschneiden. Siehst du es?
Hätte der gute Schorsch eine bildhafte Vorstellung von Brüchen gehabt, so könnten ihn seine ehemaligen Mitspieler nicht heute noch mit dieser Geschichte zur Witzfigur erklären.
Also, die Vorstellungskraft benutzen, wo es nur geht. Mit Vierteln und Achteln geht das ja noch recht leicht. Darum bleiben wir erst mal dabei.
Stellen wir uns vor, der dicke Achmed hätte $\frac{5}{8}$ eines runden Fladenbrotes auf dem Teller liegen und der kleine Taner $\frac{3}{4}$ auf dem seinigen.
"Daß Du auch immer so viel futtern mußt!" stichelt Taner.
"Wieso denn? Du hast doch mehr!" verteidigt sich Achmed.
Wer hat recht?

Wenn ich meine Vorstellung ganz genau nehme, dann kann ich diese Aufgabe lösen ohne nachzurechnen. Ich sehe zuerst drei Viertel und lasse sie stehen. Dann sehe ich daneben ein Ganzes in Viertel unterteilt und teile jedes Viertel in der Mitte noch einmal, jetzt sind es Achtel. Wenn ich nun zwei Achtel wegnehme, habe ich gerade noch so viel wie drei Viertel. Ein weiteres Achtel weggenommen bedeutet dann schon weniger als drei Viertel. Also hat Achmed recht. (siehst Du es auch?)

Es geht aber auch einfacher! Nämlich dann, wenn ich mir drei Viertel vorstelle und zerschneide sie gleich in Achtel. Dann sehe ich sofort, daß aus den drei Vierteln sechs Achtel werden. Und jetzt sind die Stücke auf beiden Tellern gleich groß und leicht zu vergleichen.
Gleich große Stücke! Dieser Schlachtruf gilt sowohl für das Vergleichen von Brüchen als auch Bruchrechnungen mit + und - .
Ein wenig schwerer: Welcher Bruchteil ist größer, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$?
In der Vorstellung schwer zu unterscheiden, darum Schlachtruf!
Aber wie schneiden?
Auch das kann man in der Vorstellung durchspielen:
Jedes Drittel einmal durchgeschnitten, also in zwei Teile, dann ist das Ganze in Sechstel eingeteilt,
zweimal durchgeschnitten, also jedes Drittel in 3 Teile, (siehst du es?) dann sind es Neuntel,

dreimal durchgeschnitten, also in vier Teile, dann sind es Zwölftel.
(Kannst Du die Bilder festhalten? Wenn nicht, üben!)

Die Bilder sollen uns aber nur sagen, warum etwas so ist, und uns helfen, es nicht zu vergessen. Wir müssen also nur wissen, daß wir hier **gleich große Stücke** brauchen.
So rechnen wir mit Zahlen: Vielfache von 3: 6, 9, 12, 15
Vielfache von 4: 8, 12
Aha! In Zwölftel müssen wir beide Brüche zerschneiden, beziehungsweise umwandeln, damit wir gleich große Stücke haben. Zwölf ist der **Hauptnenner** für Drittel und Viertel! Der Hauptnenner ist dasselbe wie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV). Darüber hast Du ja sicher in der fünften Klasse einiges gelernt.
Einen Bruch zerschneiden, daß die Teile mehr werden, aber der Anteil vom Ganzen gleich groß? Sitzt das Bild? - **Erweitern**!
Wenn wir **gleichgroße Stücke** wollen, müssen wir den **Hauptnenner** suchen und auf diesen **erweitern**.
Aus dem Nenner 3 soll der Nenner 12 werden, also:
$\frac{2*4}{3*4} = \frac{8}{12}$;

Aus dem Nenner 4 soll der Nenner 12 werden, also: (Das kannst Du sicher selbst!)

Als saubere Rechenaufgabe sieht das so aus:

Aufgabenstellung:	Größer oder kleiner?		*Deine Denktätigkei*t:
Brüche:	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	*Brüche vorstellen, Schlachtruf einfallen lassen. Hauptnenner finden,*
	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	*erweitern.*
	$\frac{2}{3}$ $<$	$\frac{3}{4}$	$<$ oder $>$ *richtig einsetze.*

Finden des Hauptnenners und erweitern auf den Hauptnenner werden auch zu dem nächsten Lernschritt gebraucht.

<u>Addieren und Subtrahieren von Brüchen</u>

Die zehnte Klasse einer Hauptschule verkauft in der Pause Pizza, um ihre Klassenfahrt zu finanzieren.
Amani hat vegetarische Pizza gebacken und sauber in Zwölftel zerschnitten, Floppy hat seine scharfgewürzte Pizza Tutto in Achtel zerteilt. Die Pizzen sind auf einem langen Tisch angerichtet zur Selbstbedienung.
(Kannst du schon die Bilder beim Lesen mitlaufen lassen?)
Sven Katzenpeter aus der 6b und seine Freundin Angela Gluthaupt bedienen sich. Sven mag es gern scharf und lädt sich fünf Stücke Tutto und zwei Stücke vegetarisch auf seinen Teller. Angela mag es lieber vegetarisch und nimmt sechs Stücke davon und nur ein Stück Pizza Tutto.
(Die Teller solltest Du jetzt vor Dir sehen, wenn Du das Kommende verstehen willst.)
An der Kasse sitzt Heiner, auch "Brain" genannt.
"Sieben Stücke", zählt er über Svens Teller., "sieben mal siebzig Cent , das macht - Augenblick- ah, Vier Euro neunzig Cent!"

Als Angela ihren Teller vor ihn stellt, schaut Brain kurz hin und rattert dann herunter: "Sieben Stücke, das macht Vier Euro neunzig Cent!"
"Du bist wohl bescheuert!" motzt Angela los, daß man es in der ganzen Pausenhalle hören kann, "Ich dachte Zehntklässer wären alle Intelligenzbolzen. Das bezahle ich nicht!"
"Was willst du denn, kannst du nicht zählen?“ meckert Brain, "Der Svenner hat doch auch bezahlt!"
"Der ist ja auch ein Penner, und vom Bruchrechnen hat er so wenig Ahnung wie du!" setzt Angela noch einen drauf.
Wem würdest Du recht geben?
Wenn es Dir noch nicht klar ist dann stelle dir noch einmal vor, wie eine Pizza erst in Viertel zerteilt wird und dann jedes Viertel in Mitte durchgeschnitten. Dann noch einmal die Pizza in Vierteln und nun würde jedes Viertel nochmal in drei Stücke geteilt. Klar?
Was hatte Sven auf seinem Teller, was Angela auf ihrem?
Wie hätten die Zehntklässer von vorneherein verhindern können, daß Streit um die Preise entsteht?
Aha, unser Schlachtruf: **Gleichgroße Stücke!**
Nun laß uns mal ausrechnen, wieviel Grund Angela hatte, so sauer zu sein.
Auf Svens Teller:
$\frac{5}{8}+\frac{2}{12}=$ (*Schlachtruf! Hauptnenner! Erweitern!)*
$- + - =$ *(Na?)*
Auf Angelas Teller:
$\frac{6}{12}+\frac{1}{8}=$
$- + - =$
Wenn Du richtig gerechnet hast (Aber Hallo!), dann haben wir zum Vergleich jetzt folgende Minusaufgabe zu lösen. Rein der Form halber, denn im Kopf hast Du sie sicher schon erledigt!
$\frac{19}{24}-\frac{15}{24}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$; (***Ergebnisse werden immer auf ihren kleinsten Zahlenwert heruntergekürzt)***
Kannst Du Dir noch ein Sechstel vorstellen? (Vielleicht erst in Drittel eingeteilt und dann jedes Stück noch mal in der Mitte durchgeschnitten) Jeden falls sind wir ja nicht der Pfälzer Schorsch und wußten darum von Anfang an, daß ein Achtel ein wesentlich größeres Stück ist als ein Zwölftel. Also hatte Angela recht. Wenn sie auch mit ihrer aufbrausenden Art ihrem Namen alle Ehre macht, so dürfte sie beim nächsten Zeugnis doch ein Fall für den A-Kurs sein!

Addieren von gemischten Zahlen

Nun zu den gemischten Zahlen! Auch hier erst vorstellen, dann rechnen!
Aufgabe, zunächst nur zum Vorstellen: $3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=$;
Na, das könnten Kuchen derselben Sorte sein. Da wäre doch die erste Frage, wie viele ganze Kuchen es denn sind. Also ist das Neue an dieser Aufgabenstellung, daß wir zuerst die Ganzen miteinander verrechnen. Dann sieht der Rechengang so aus:
$3\frac{1}{4}+1\frac{1}{6}=$ *Vorstellen, Schlachtruf!*
$4\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=$ *Ganze verrechnen, Hauptnenner, Erweitern!*
$=4\frac{5}{12}$; *Lösung (wenn möglich, kürzen!)*

Was würdest Du tun, wenn eine Lösung so aussähe: $3\frac{7}{4}$?

Hast Du Dir den Bruch vorgestellt? Dann müßte es doch klar sein. Ist es nicht klar, dann blättere zurück zum Kapitel "Gemischte Zahlen"!
Wie viele Ganze stehen nun da?

Jetzt gebe ich Dir noch drei Aufgaben zum Üben, dann müßtest Du fit genug für die Aufgaben in Deinem Rechenbuch sein.

a) $6\frac{4}{5}+1\frac{1}{15}=$; b) $5\frac{9}{10}+2\frac{1}{4}=$; c) $4\frac{4}{5}+3\frac{5}{6}=$;

Welche Lösung gehört zu welcher Aufgabe?
($8\frac{19}{30}$;$7\frac{13}{15}$;$8\frac{3}{20}$;)

Subtrahieren gemischter Zahlen

Du wirst Dir denken können, daß man beim Subtrahieren von Brüchen ebenso vorgehen muß wie beim Addieren von Brüchen und gemischten Zahlen. Nur gibt es beim Subtrahieren von gemischten Zahlen eine Falle. Aber auch diese kann leicht umgehen, wer sich vorstellt, worum es geht.
Nehmen wir an, bei einer Familienfeier bittet Dich Deine Mutter aus der Küche fünf Stücke Käsekuchen zu holen.
Du kommst in die Küche und siehst zwei ganze Kuchen und drei Stücke, aber Du brauchst ja fünf. Und nun?
Ich nehme mal an, Du kannst mit einem Kuchenmesser umgehen Sonst müßtest du jemanden zu Hilfe rufen.
Wie viele ganze Kuchen und wie viele Stücke liegen auf dem Tisch wenn Du den einen Kuchen in Zwölftel zerschnitten hast?
Was bleibt übrig, wenn Du nun die fünf Stücke wegnimmst?
Als Rechnung sähe das so aus:

$2\frac{3}{12}-\frac{5}{12}=$

$1\frac{15}{12}-\frac{5}{12}=$

$= \quad - \quad =$

Wie lautet das Endergebnis? (Hast Du auch wirklich alles ausgeführt, wie es sein soll?)

Nehmen wir mal eine ganze Rechnung von vorne:

$9\frac{3}{8}-4\frac{7}{12}=$ *Aufgabe genau ansehen, "Bild machen", 2. Bruch größer,*

Ganze verrechnen, auf Hauptnenner erweitern.

$5\frac{9}{24}-\frac{14}{24}=$ *Fall liegt klar, also ein Ganzes zerschneiden, Stücke werden mehr!*

$4\frac{33}{24}-\frac{14}{24}=$

Aus 24 +9 wurden dreiunddreißig Vierundzwanzigstel

$=4\frac{19}{24}$;

Nun kannst du selber üben!

a)$13\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}=$ *b*)$15\frac{1}{10}-6\frac{1}{3}=$ $11\frac{1}{11}-1\frac{1}{2}=$

Welches Ergebnis gehört zu welcher Aufgabe? $9\frac{13}{24}; 8\frac{23}{30}; 8\frac{3}{4};$
So, nun kann man Dich alleine auf solche Aufgaben loslassen und wir dürfen weitergehen zum nächsten Kapitel.

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Bruch mal ganze Zahl

Drei Viertel - Du kannst Dir selbst aussuchen , was Du Dir vorstellen willst - sollen jetzt dreimal da sein. Siehst Du alles? Kannst Du die Stücke zählen? Wie heißt es jetzt als Bruch?
Aha, es sind nun Neun Viertelstücke, also heißt der Bruch neun Viertel! Aber so lassen wir das nicht stehen, sondern wir setzen die Ganzen zusammen. Das ergibt zwei mal vier Viertel und ein Viertel bleibt übrig, also Zwei Ganze, ein Viertel.
Der Zähler wird multipliziert. Denn er gibt ja an, wie viele Stücke es sind, während der Nenner die Größe der Stücke benennt.
In Zahlen sieht das dann so aus:
$\frac{3}{4} * 3 = \frac{3*3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4};$
Ist doch nicht schwer, oder?
Schaffst Du es, Dir selbständig kleine Brüche vorzustellen und zu vervielfachen? Selbst wenn Du später einmal in einer Arbeit eine große Bruchaufgabe vor Dir hast und nicht mehr genau weißt, wie Du rechnen mußt, wird es Dir helfen, wenn Du Dir eine kleine Aufgabe vorstellst. So kommst Du von selbst wieder auf die richtige Rechenweise.

Kürzen am Bruchstrich

Durch Kürzen -(hast Du noch ein Bild davon? Stichwort: Tomatensoße!) - werden die Zahlen kleiner. Dann können wir leichter damit rechnen. **Bei Multiplikationen und Divisionen ist es erlaubt, am Bruchstrich zu kürzen.** Das geht natürlich nur, wenn Nenner und Zähler einen gemeinsamen Teiler habe, also eine Zahl enthalten, durch die man beide teilen kann. In der folgenden Aufgabe werden das die 16 im Zähler und die 24 im Nenner sein.

$16 * \frac{11}{24} =$ *Genau ansehen, vorstellen, wie muß es gehen?*

$\frac{16*11}{24} =$ *Zähler malnehmen. Ist Kürzen möglich?*

$\frac{\overset{2}{\cancel{16}} * 11}{\underset{3}{\cancel{24}}}$ *16 und 24 werden gestrichen und durch 8 geteilt.*
Die Ergebnisse darüber u. darunter geschrieben. Der neue Bruch:

$\frac{2*11}{3} =$ *Ausrechnen mit den kleineren Zahlen!*

$\frac{22}{3} = 7\frac{1}{3};$

In einer Reihe:

$16 * \frac{11}{24} = \frac{\overset{2}{\cancel{16}} * 11}{\underset{3}{\cancel{24}}} = \frac{2*11}{3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3};$

Schau Dir den Ablauf noch einmal in Ruhe an, bis Du jeden Schritt verstehst. Wenn nötig, gehe bitte noch einmal zurück zum Abschnitt "Erweitern und Kürzen".
Schau dir auch genau an, und stelle es Dir genau vor, was der Unterschied zwischen Multiplizieren eines Bruches und Erweitern eines Bruches ist.
Wie sieht das Erweitern des Bruches $\frac{3}{4}$ mit 2 aus, in Bildern? In Zahlen? Wie das Multiplizieren?
Wer die Bilder sehen kann, wird die beiden Rechenweisen nicht verwechseln.

Bruch durch ganze Zahl

Fangen wir mal ganz klein an. Ein schöner runder Kartoffelpuffer in Pfannengröße ist in drei Viertel zerschnitten. Den sollst Du zwischen Zweien Deiner Freunde teilen. Wie gehst Du vor?
Ja, richtig, es gibt zwei Möglichkeiten!
Erste: Du schneidest jedes der drei Stücke in der Mitte durch. Siehst du es? Wie heißen die Stücke, wie viele sind es? Wie viele bekommt jeder?
Zweite: Du schneidest nur ein Stück durch und gibst jedem ein solches Stück und ein Viertelstück. So weit, so gut. Aber wenn Du nun zusammenrechnen willst, was einer bekommen hat, dann hast Du die Aufgabe $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$; (Schlachtruf!)
Also ist es doch am besten, alle Viertelstücke in Achtel zu zerschneiden. Stelle Dir das bitte noch einmal vor: Die drei Viertel, die Du siehst, werden in sechs Achtel zerschnitten und dann so auseinandergezogen, daß auf jeder Seite drei Achtel liegen. Stelle Dir bitte den Vorgang des Auseinanderziehens noch einmal genau vor.
Aus Vierteln werden Achtel, darum ändert sich der Nenner. Weil aber "auseinandergezogen" wird, ist im Ergebnis der Zähler unverändert.
Die drei Viertel wurden durch zwei geteilt (dividiert) und jeder - bzw. einer - bekam drei Achtel. Wie setzen wir das am Kürzesten in eine Zahlenrechnung um?

$\frac{3}{4}$	*Da steht unser Bruch*
$\frac{3}{4} : 2 =$	*Das ist die Aufgabe.*
$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$	*So sieht es mit Ergebnis aus. Was ist geschehen?*
$\frac{3}{4*2} = \frac{3}{8}$;	*Aha! Nur der Nenner wurde "bearbeitet" und wir haben das Ergebnis!*

Nochmals in einer Reihe:
$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4*2} = \frac{3}{8}$;
Wie würde das nun aussehen wenn Du die drei Viertel durch drei teilen (dividieren) würdest? Kannst Du es sehen?
$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4*3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$;
Wie sähe das aus, wenn Du durch fünf dividieren würdest? Kannst du Dir dasselbe mit anderen überschaubaren Brüchen vorstellen? In Bildern? In Zahlen? Was geschieht immer wieder mit dem Zähler?
Nun schau Dir bitte einige Aufgaben in deinem Rechenbuch zu diesem Thema an. Es kommt darauf an, zu wissen, *wie* gerechnet wird. Das Rechnen selbst bis auf Kürzen am Bruchstrich- ist ja recht einfach. Betrachte die jeweilige Aufgabe. Was wird gefordert? Kannst du sie in Bilder umsetzen und die Handlung vollziehen? Es kann sein, daß Brüche vorkommen, die kompliziert und sehr schwer vorstellbar sind. Da mußt Du dich nicht quälen! Wenn du nicht auf Anhieb weißt, wie gerechnet werden muß, dann stelle Dir noch einmal vor $\frac{3}{4}:2 =$, das kriegst Du

doch sicher immer wieder hin. Und mit großen Zahlen wird genau ebenso verfahren wie mit kleinen!

Bruch mal Bruch(Multiplikation)

Erinnerst Du dich noch an das Kapitel "Bruchteile von Anzahlen?"
Weißt Du noch, was $*\frac{3}{4}$ heißt? Wenn nicht, so schau dir dort das Wichtigste noch einmal an.
Also, $*\frac{3}{4}$ heißt noch mal, daß etwas, das vorher ganz da war, nun nur noch zu drei Vierteln da ist. Ein Viertel fehlt! Siehst Du etwas?
Wie läuft der Rechenvorgang bei $*\frac{3}{4}$?
Wie sehen zwei Drittel im Bild aus? Wie errechnet man zwei Drittel von irgendetwas?
So, und jetzt wird es ganz neu:
Stelle dir vor, da stehen drei Viertel, und die sollen nur noch zwei Drittel mal da sein.
In Zahlen: $\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=$;
Wenn du bisher genau aufgepasst hast, ist es so neu nun auch wieder nicht. Denn Du weißt, was ein Bruch aussagt und wie man Bruchteile errechnet. (Wenn nicht, mal wieder nachblättern!) Also heißt mal zwei Drittel kurz gefasst: Geteilt durch drei und mal zwei. Wie man beides rechnet wissen wir doch bereits. (Falls es hängengeblieben ist.) Kannst du dir dazu auch ein Bild, bzw. einen Kurzfilm entwerfen? Ich gebe Dir vorsichtshalber den Film dazu. Da kannst du deinen eigenen überprüfen.
Stellen wir uns drei Viertel vor, wie gewohnt in Kreisform.
"Drittel" heißt doch, daß durch drei geteilt wird, denn es ist ja der Nenner. Und das kennen wir doch auch vom vorherigen Kapitel.
Also schneiden wir jedes Viertel in drei Teile, auch das, das nicht mehr da ist!
In wie viele Teile ist nun das Ganze zerlegt? Kennen wir doch auch!
Aha, Zwölftel sind es. Aus unseren <u>drei</u> Vierteln sind neun Zwölftel geworden. (Siehst Du es?)
Aber wir brauchen nur zwei Drittel davon!
Ziehen wir unsere neun Zwölftelstücke auseinander in drei Teile, so liegen in jedem Teil . . .ja, drei Zwölftelstücke. Also ist ein Drittel von drei Vierteln gleich drei Zwölftel. (Siehst du es?)
Was sagt der Zähler? Wie lautet er? Also was tun?
Ziehen wir zwei Teile zusammen so sind es - ja, sechs Zwölftelstücke zusammen.
Atempause, und dann noch mal der Film:
Drei Viertel - jedes Viertel in drei Teile (Drittel!) - zwei Teile zusammen - macht sechs Zwölftel.
Daß man durch einen Bruch teilt (dividiert), indem man den Nenner malnimmt (multipliziert), das hatten wir ja schon drauf. (Bilder? Zahlen? Noch mal nachsehen?) Neu ist jetzt, daß der entstandene Bruchteil noch mit dem Zähler multipliziert wird. Also Bruch durch ganze Zahl und Bruch mal ganze Zahl in Einem! (**Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner!**)Da muß man wenig schreiben:
$\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=\frac{3*2}{4*3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$;

Das war jetzt zum genauen Betrachten. Was haben wir vergessen? Aha!

$$\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}*\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}*\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{1}{2};$$ (noch mehr Schreibarbeit gespart!)

Ist dir auch klar, wie am Bruchstrich gekürzt wurde? Welche Zahlen hatten gemeinsame Teiler? (Z. B. Zwei ist in sich selbst einmal enthalten, in der Vier zweimal.)
Zur Wiederholung. Stelle dir noch einmal vor:

$\frac{3}{4}*2 =$

$\frac{3}{4}:3 =$

$\frac{3}{4}*\frac{2}{3} =$

Konntest du alles sehen? Wo kann man am Bruchstrich kürzen?
Übe bitte alle drei Verfahren an Aufgaben aus Deinem Rechenbuch und vergiß dabei das Vorstellen nicht. Und wenn eine Aufgabe zu kompliziert zu sein scheint, nimm ein "kleineres" Beispiel!

Bruch durch Bruch (Division)
Noch etwas zum Teilen (Dividieren)

Vor einer Woche sprach ich mit einem längst pensionierten Kollegen über diese Lernhilfe, an der ich gerade schreibe.
"Bruchrechnen habe ich immer gern unterrichtet," erinnerte er sich, "aber das Teilen von Brüchen durch Brüche war mir immer peinlich. Da muß man den Kindern unterjubeln, daß etwas geteilt wird, und am Schluß mehr herauskommt, als am Anfang da war."
Da ich dieses Kapitel schon vorbedacht hatte, konnte ich ihm erklären, daß es beim Dividieren von Brüchen durch Brüche nicht um ein "Austeilen" oder "Verteilen" gehe sondern um ein "Enthaltensein in" beziehungsweise "Einteilen in".
Was heißt "Enthalten sein in"?
Nehmen wir wieder unser Beispiel mit den zwölf Äpfeln.
Wir können immer drei Äpfel in eine Reihe legen, dann gibt es vier Reihen. (siehst Du es?) Damit ist gezeigt: drei ist in zwölf vier mal enthalten.
Legen wir Viererreihen, so ist vier in Zwölf drei mal enthalten.
So einfach ist das. Aber nun zu dem Einwurf des Kollegen Ernst:
Wir sehen die zwölf Äpfel und schneiden jeden in der Mitte durch. Wie viele halbe Äpfel haben wir jetzt? Na? Siehst Du? Das heißt rechnerisch:
$12:\frac{1}{2}=24;$
Die Äpfel, die da waren, sind nicht mehr geworden. Das Ergebnis sagt nur aus, wie viele halbe Äpfel in den zwölf enthalten sind!
Das war doch recht einfach! Etwas schwerer: Wie oft ist ein Achtel in drei Vierteln enthalten?
Stelle Dir unsere berühmten drei Viertel vor. Was müssen wir tun, um das Ganze in Achtel einzuteilen? Ja, natürlich, jedes Viertel in seiner Mitte durchschneiden.
Wie viele Achtelstücke liegen nun da?

$$\frac{3}{4}:\frac{1}{8}=6;$$

Das ist keine Hexerei, wenn man sich die Dinge vorstellen kann. Aber damit Du die Rechenweise rein logisch verstehen kannst, mußt Du etwas über die Umkehrungen wissen.

Umkehrungen

Wieder die Zwölf Äpfel. Wir verteilen sie an vier Kinder. jedes bekommt drei.
12 : 4 = 3;
Jedes Kind verzieht das Gesicht und legt seine Äpfel zurück. Wir sehen die zurückgelegten Äpfel in Dreierreihen. Das sagt aus:
4 * 3 = 12; Das ist die Umkehrung des Verteilens. Wir haben zuerst dividiert und dann multipliziert, dann waren es wieder zwölf. Also ist die Multiplikation die Umkehrung der Division!
Wie es aussieht, wenn die Kinder erst ihre Äpfel hinlegen und diese dann verteilt werden, das kannst Du Dir alleine vorstellen.

12: 4 = 3; / 3*4 = 12; **Multiplikation ist die Umkehrung der Division!**

4 * 3 = 12; / 12 : 4 = 3; **Division ist die Umkehrung der Multiplikation!**

Rechenweise bei Bruch durch Bruch (Division)

Wie oft ist ein Achtel in drei Vierteln enthalten? Läuft Dein Film? In Zahlen sieht es so aus:
$\frac{3}{4}:\frac{1}{8} =$;
Wenn dein Film stand, weißt du bereits das Ergebnis. Wenn du unsere vielgeplagte Dreiviertelspizza noch sehen und riechen kannst, dann schneiden wir sie zu Achteln, und dann sind sechs Achtel enthalten. Dann heißt es:
$\frac{3}{4}:\frac{1}{8} = 6$;
Ja, aber wie rechnen? Geben dir unsere zwölf Äpfel eine Ahnung?
$12:\frac{1}{2} = 24$;
Dadurch, daß wir die zwölf Äpfel in Halbe geschnitten haben, sind aus den zwölf ganzen Äpfeln 24 halbe geworden. Das können wir sehen und so umsetzten, daß die Zwölf mit der zwei malgenommen (multipliziert) wurde.
"Aber die 2 stand doch im Nenner," wirst du jetzt sagen, " und durch den wird doch geteilt."
Stimmt zwar, aber nur wenn mit einem Bruch malgenommen (multipliziert) wird.
Die Division ist aber die Umkehrung der Multiplikation.
Hätte die Aufgabe geheißen: $12*\frac{1}{2} =$; Wie hätte gerechnet werden müssen? Ergebnis?
Wie muß dann die **Umkehrung** zu $*\frac{1}{2}$ heißen?
Wenn du Dich erinnerst, was ein Bruch aussagt, (Nenner? Zähler?) so müßte im Normalfall durch zwei dividiert und mit Eins multipliziert werden.
Wie die :2 umgekehrt wird, haben wir bereits mitgekriegt. Was bleibt dann nur noch für die *1 ? Aha! So muß es aussehen:
$12:\frac{1}{2} = \frac{12*2}{1} = \frac{24}{1} = 24$;
Der ganze Bruch wurde umgekehrt und heißt darum **Kehrbruch!** Und mit diesem können wir dann ganz normal multiplizieren.
(Übrigens, wir sprechen nicht "zwei Einstel" oder "vierundzwanzig Einstel" sondern "Zwei durch Eins" und vierundzwanzig durch Eins". Die eins im Nenner sagt ebenso wie die die formulierte Aufgabe, daß die Zahl im Zähler Ganze angibt.)
Noch ein Beispiel: Wie oft sind $\frac{2}{3}$ in 3 Ganzen enthalten?
Also: $3 : \frac{2}{3} =$;
Bildhafte Lösung: Du stellst Dir drei Äpfel oder was auch sonst vor und zerschneidest jedes Ganze in drei Teile. Stimmt Dein Film, so siehst Du jetzt neun

Teile. Davon legst Du nun immer zwei zusammen, beziehungsweise du *teilst sie in Zweiehrreihen ein.* (Siehst Du es?) Es ergeben sich vier Zweierreihen. Ein Stück, das gleich eine halbe Zweierreihe ist, bleibt übrig.
Rechnerisch sieht das so aus:
Die Drei wird mit drei mutlipliziert, es entstehen 9 Teile. Diese werde durch 2 dividiert. Es ergeben sich 4 Ganze und ein Halbes.
Bruchschreibweise:
$3:\frac{2}{3} = \frac{3*3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$;
Mitgekommen? Kannst Du zur Bruchschreibweise die Bilder sehen? Wenn nicht, arbeite bitte nocheinmal nach!

Also, wenn vor einem Bruch das Zeichen zur **Division** steht, so **multiplizieren** wir **mit dem Kehrbruch**, weil das die Umkehrung der Multiplikation mit dem Bruch ist!
Atempause? Schau Dir danach bitte noch mal an, wie wir auf den Kehrbruch kamen und lasse die Bilder mitlaufen.
Stelle Dir Kehrbrüche zu verschiedenen Brüchen in Zahlen vor!
Nun zu einer "richtigen" Bruch durch Bruch Aufgabe!
$\frac{3}{4}:\frac{2}{5} =$ *Worum geht es? Was weiß ich? Aha, Kehrbruch!*
$\frac{3*5}{4*2} =$ *Kehrbruch multiplizieren. (Kürzen, wenn es geht)*
$= \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ *Ergebnis in die übersichtlichste Form bringen.*
Ich glaube, nun kannst ganz nach eigenem Belieben an Aufgaben aus Deinem Rechenbuch üben.

<u>Multiplikation und Division mit gemischten Zahlen</u>
<u>Gemischte Zahl durch ganze Zahl</u>

$2\frac{5}{8}:3 =$;
Fällt Dir dazu selbst eine Geschichte ein?
Wenn zwei ganze Kuchen auf dem Tisch lägen und Du solltest sie an drei Mädchen gerecht verteilen, würdest du doch sicher nicht die ganzen Kuchen in Drittel zerschneiden, sondern in die vorgegebenen Achtel. Deshalb heißt unser Schlacht ruf hier: **Alles in Stücke!** (Bild)oder auch **Ganze auf den Bruchstrich!** (Zahlen)
Erinnerst Du Dich an das Kapitel "Gemischte Zahlen?" Wenn nicht, blättere bitte nach und vergiß die Bilder nicht.
Wie viele Achtel hat ein Ganzes? Zwei Ganze? Wie viele Achtel sind es zusammen?
Dann muß unsere Rechnung so laufen:
$2\frac{5}{8}:3 =$ *Genau ansehen, erkennen, worum es geht, Schlachtruf*!
$\frac{21}{8}:3 =$ *Ganze auf den Bruchstrich! Bruch durch Zahl, Bild?*
$\frac{21}{8*3} = \frac{\overset{7}{\cancel{21}}}{8*\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{7}{8}$ *Nenner malnehmen. Kürzen am Bruchstrich. Was sagt das Ergebnis aus?*
Ja, das ist eine Verteilungsaufgabe. Jedes Mädchen bekommt sieben Achtelstücke. Das siehst Du ja auch.
Eine Aufgabe für Dich alleine:

$4\frac{4}{9}:6 =$

Wenn Du$\frac{20}{27}$ herausbekommen hast, hast du richtig gerechnet. Wenn nicht, überprüfe die einzelnen Rechenschritte. Hast du am Bruchstrich gekürzt?

Gemischte Zahl mal ganze Zahl

$1\frac{3}{8}*3 =$

Was fällt Dir dazu ein?

Zum Rechnen brauchen wir unseren Schlachtruf: "Alles in Stücke!" oder "Alles auf den Bruchstrich!" Das Multiplizieren des entstehenden Bruches mit der ganzen Zahl wird dir wohl klar sein, aber es schadet nicht wenn Du die Bilder so mitlaufen läßt, daß der Vorgang noch mal klar wird. Die Lösung kann man im Kopf errechnen. Sie lautet: Dreiunddreißig Achtel.

Gemischte Zahl mal Bruch

Hier beginnen wir etwas schwerer. Aber es ist doch nicht unmöglich, darauf zu kommen, daß der Schlachtruf auf beide Gemischte Zahlen angewendet wird, oder?

$12\frac{1}{2}*8\frac{2}{5} =$ *Genau ansehen! Vorstellen! Schlachtruf!*

5 21

$\frac{\cancel{25}*\cancel{42}}{\cancel{2}*\cancel{5}} =$ *Wie wurde gekürzt? 1 im Nenner bedeutet?*

1 1

$\frac{105}{1} = 105;$

Mitgekommen? Dann noch eine Aufgabe für dich: $5\frac{3}{4}*5\frac{1}{3} =$; Wenn du richtig rechnest, erhältst Du $28\frac{2}{3}$ als Ergebnis.

Gemischte Zahl durch Bruch.

Wenn ich dir den Impuls "Umkehrung der Multiplikation" vorgebe, fällt Dir dann sofort ein, wie man durch einen Bruch dividiert?

Oder hättest du den Impuls gar nicht gebraucht?

Wie oft ist $\frac{1}{2}$ in 12 enthalten? (Äpfel!) Wie sähe die Rechnung aus?

Nun müßtest Du gut genug vorbereitet sein, um folgende Aufgabe selbst zu rechnen.

$12\frac{3}{4}:2\frac{1}{8} =$ *Vorstellen, Schlachtruf, wie Bruch durch Bruch?*

------------ *Genau hinschauen beim Kürzen!*

Ergebnis: Sechs Ganze

Gesellenprüfung im Bruchrechnen

Nun kannst du selbst überprüfen, wie gut du alles verstanden hast. Wenn Zweifel kommen, versuche es bitte *zuerst mit einem Bild* und erst wenn Dir dann die Rechenweise nicht klar ist, schlage nach.
Um die Aufgaben lösen zu können, mußt Du zwei Regeln kennen:
1. Klammern werden immer zuerst gelöst!
2. Punkt geht vor Strich!

a)$16\frac{2}{3}:(3\frac{1}{9} - \frac{1}{3})=$;b)$1\frac{2}{3}*\frac{4}{5} - \frac{4}{9}*\frac{3}{4} =$; c) $20\frac{1}{4} - (4\frac{5}{8} - 1\frac{2}{3})=$; d) $(6\frac{3}{4} - 2\frac{2}{3}):1\frac{1}{6} =$;

Ergebnisse: 6; $3\frac{1}{2}$;$15\frac{7}{24}$;$\frac{1}{5}$;

E Keine Angst vor Textaufgaben!

Wenn man Textaufgaben richtig lesen und verstehen kann sind sie höchstens noch halb so schwer. Richtiges Lesen heißt auch in Bilder umsetzen können. An der folgenden Aufgabe, die für die sechste Klasse als schwer eingestuft wird, werde ich dir zeigen, wie leicht gute Bilder das Rechnen werden lassen.
Aufgabe:
Emin , Frank, Vitali und Carlos haben sich schon die ganze Woche auf den Samstagnachmittag in der Go Cart Bahn gefreut. Jetzt herrscht dort aber Hochbetrieb. Die Freunde bekommen gemeinsam nur einen Cart für drei Stunden. Wie lange kann jeder fahren?
1. Satz: siehst Du die Freunde alle? Kannst Du jedem ein Gesicht und seine eigene Kleidung geben? Sehen sie sich vielleicht einen Katalog der Go Cart Bahn an?
2. Satz: Worauf bezieht sich das Wort "dort"? Siehst Du den Betrieb auf der Bahn? Der ist schuld an der Misere.
3. Satz: Die Freunde - wie viele es sind, sagt dir dein Bild vom ersten Satz - vor einem einzigen Cart und -es ist eine Zeitaufgabe - darüber eine große runde Uhr. Einer hebt vielleicht drei Finger, damit wir die Zahl drei nicht vergessen.
4. Satz: Die Frage ist klar. Wie lange kann je einer im Cart sitzen und fahren?

Die vier Freunde unter der Uhr, das ist das **Schlüsselbild** der Aufgabe. Geübte Leser gehen noch weiter und sehen gleich drei Uhren. Es geht aber auch so, wenn man nicht vergißt, daß es drei Stunden sind.

Nimm dir Zeit und versuche für dich eine Lösung zu finden. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Nimm dir Zeit.

Aus dem Bild der Uhr mit den vier Freunden ergibt sich doch der Gedanke an Viertel und ich sehe die Uhr in Viertel geteilt. (Oder gleich alle drei Uhren) Wenn einer also von der ersten Stunde ein Viertel bekommt, und von der zweiten eins und von der dritten, dann sind es doch insgesamt drei Viertel. Das ist doch ganz einfach.
Rechnerisch darfst Du schreiben:
3 Stunden : 4 = $\frac{3}{4}$ Stunden ;

(Jede Division kann man als Bruch schreiben und jeden Bruch als Division, das brauchst Du später bei dem Umrechnen in Dezimalbrüche.)

Eine Möglichkeit ist auch das "Umwechseln in kleinere Münze".
Die Uhr ist rundum in Sechzigstel eingeteilt. Eine Stunde hat sechzig Minuten, also habe drei Stunden 180 Minuten.
180 Minuten : 4 = 45 Minuten

Auch so wäre es gegangen:
1 Stunde : 4 = $\frac{1}{4}$ Stunde
3 Stunden : 4 = $\frac{3}{4}$ Stunden

Es mag sein, daß Dein Mathe - Lehrer auf bestimmten Lösungswegen besteht. Da mußt Du eben im Unterricht die Ohren spitzen.
Übrigens, wenn man im Unterricht Bilder mitlaufen läßt, lernt man leichter und die Stunden gehen schneller herum.
Nächste Aufgabe:
Auf einer Kabelrolle waren am Morgen noch $12\frac{1}{2}$ Meter Kabel. Bis zur Brotzeit wurden $3\frac{3}{4}$ Meter und $4\frac{1}{2}$ Meter abgeschnitten. Wie viele Meter blieben übrig?
Wir sehen die Rolle und merken uns, wie lange das Kabel ist. Dann sehen wir, wie zweimal davon abgeschnitten wird. Es wird also vom Kabel weggenommen. Alles klar?
Das war da! Weggenommen wurden:

$12\frac{1}{2}$ **-** $3\frac{3}{4}$ **-**$4\frac{1}{2}$ =

$12\frac{1}{2}$ **-(**$3\frac{3}{4}$ + $4\frac{1}{2}$**)** = *(Was zusammen weggenommen wurde)*

Komplizierter vorzustellen:
Fräulein Itzeblitz legte in $3\frac{1}{4}$ Stunden 260 Kilometer mit ihrem Auto zurück. Wie viele Kilometer schaffte sie im Durchschnitt pro Stunde?

Wir können uns die Strecke als gerade Linie vorstellen.
Wie kriegen wir dann die Stunden dazu? Ja, wir können diese Strecke in drei Teile und ein Viertel davon *einteilen.* (Bei einer maßstabsgerechten Zeichnung ergäbe sich daraus die Lösung)
Falls dich das Wort *einteilen* noch nicht auf den Lösungsweg gebracht hat, so gebe ich Dir zu bedenken, daß die Dame die ganze Strecke in $3\frac{1}{4}$ mal eine Stunde fährt. Um auf eine Stunde zu kommen, brauchen wir die Umkehrung dazu.
Oder wir sagen: Auf $3\frac{1}{4}$ Stunden kommen 260 km, wieviel kommt dann auf eine? (Bekommt eine?) Dann ist der Rechenweg doch klar!
Welchen Schlachtruf brauchen wir? Wie muß mit dem Bruch verfahren werden?

Noch eine Aufgabe, die in ihrer Art als besonders schwer gilt:
Konditor Süßmund mischt $2\frac{3}{4}$ kg Likörpralinen mit $1\frac{3}{4}$ kg Trüffelpralinen. Mit der Mischung werden 15 gleich schwere Packungen gefüllt. wie viel wiegt eine davon?

Ich sehe einen durchsichtigen Behälter, in den abwechselnd von den beiden Sorten hineingeworfen wird bis die jeweiligen Mengen darin sind. Beide Sorten sind drin, wie muß ich rechnen? (Sie kamen zusammen)
Jetzt sehe ich die 15 leeren Packungen davor stehen und gefüllt werden. Meine Frage ist, wie viel von dem Gewicht auf eine kommt. Alles klar?
$(2\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}) : 15 =$

Ähnliche Aufgaben wie diese tauchen in Sammlungen für den A-Kurs auf:

$\frac{2}{3}$ der 24 Schüler einer Klasse können schwimmen. Von den Schwimmern sind $\frac{3}{4}$ Knaben. Wie viele Knaben können schwimmen und wie viele Mädchen?

Warum soll das so schwer sein?
Ich sehe die 24 Kinder da stehen. Jetzt treten $\frac{2}{3}$ davon nach vorne oder zur Seite. Von denen sind nun $\frac{3}{4}$ Knaben und der Rest Mädchen Hast Du den Film?
Wenn du noch weißt, wie Bruchteile von Anzahlen berechnet werden, Kannst du jetzt die Aufgabe im Kopf lösen.

Hast Du alles verstanden? Wenn vielleicht auch nicht, so hoffe ich doch, Dich von den Vorteilen des Arbeitens mit Bildern überzeugt zu haben. Aber alles braucht Übung!

Anmerkung: Die Abbildungen sind entnommen aus.
Mathematik Denken und Rechnen 6 Rheinland Pfalz. Neubert, Kurt / Wölbert, Heinrich hrsg., Westermann, Braunschweig, 1997 .